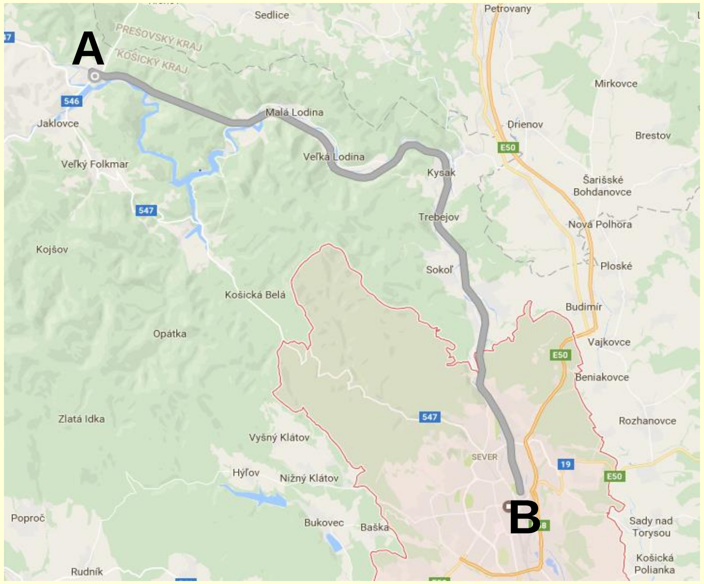
Fyzika - prednáška 1.

Základy vektorovej algebry

1. Skalárne a vektorové veličiny

PR. 1:
Z mesta A vyrazil automobil do mesta B, otočil sa a vrátil sa naspäť.
Ako dlho to trvalo? Koľko kilometrov prešiel?



<u>Doba</u> jazdy auta, ani <u>vzdialenosť</u>, ktorú auto prešlo, <u>nezávisia od smeru jazdy.</u>

PR. 2:
Akým smerom sa bude pohybovať vozík, ak na neho pôsobíme silou 50 N?

<u>Pohyb</u> vozíka <u>bude závisieť od smeru výslednice pôsobiacich síl</u>.

Rozdelenie fyzikálnych veličín: skaláre, vektory

Skalár je fyzikálna veličina, ktorá je úplne určená svojou veľkosťou, t.j. číselnou hodnotou v príslušných jednotkách. Nezávisí od smeru, smer jej číselnú hodnotu neovplyvňuje. Zápis – kurzíva.

hmotnosť - *m,* teplota - *t,* náboj - *Q,* dráha - *s*

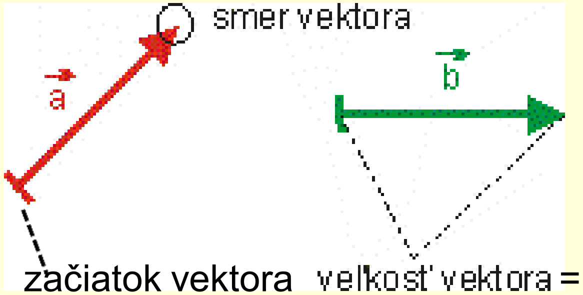
Skalár sa mení, keď sa mení jeho veľkosť.

nárast dráhy zo 100 m na 180 m

Vektor je taká fyzikálna veličina, ktorá je určená svojou veľkosťou a smerom. Smer ovplyvňuje jej číselnú hodnotu. Vektory označujeme <u>šípkou</u> nad veličinou.
Zápis – *kurzíva* alebo zápis bez šípky a **boldom**.

$$\text{rýchlosť} - \vec{v}, \ \text{moment sily} - \overrightarrow{M}, \ \text{sila} - \overrightarrow{F}, \ \text{intenzita elektrického poľa} - \vec{E}$$

Vektory znázorňujeme <u>orientovanou úsečkou</u>.



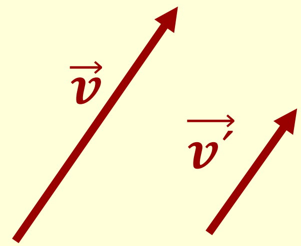
<u>Veľkosť vektora:</u>
zapisujeme v absolútnej hodnote alebo len písmenom bez šípky v príslušných jednotkách = (skalár)

$$|\vec{a}| = a \qquad \left|\vec{b}\right| = 3 \text{ cm}, \qquad b = 3 \text{ cm}$$

Vektor sa mení:

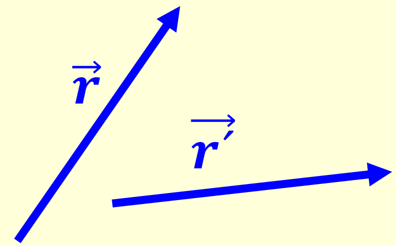
1. ak sa mení jeho veľkosť, ale nemení sa jeho smer

   PR: auto spomaľuje na priamej ceste



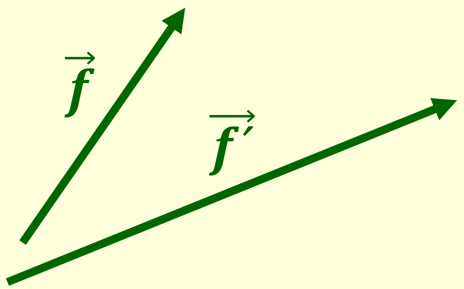
2. ak sa nemení jeho veľkosť, ale mení sa jeho smer

   PR: auto ide do zákruty s konštantnou rýchlosťou



3. ak sa mení jeho veľkosť aj smer

   PR: auto predbieha autá a súčasne zrýchľuje



***Jednotkový vektor* -** vektor, ktorého veľkosť je rovná jednej (nemá nijaký rozmer a jednotku), a má určitý smer a orientáciu.

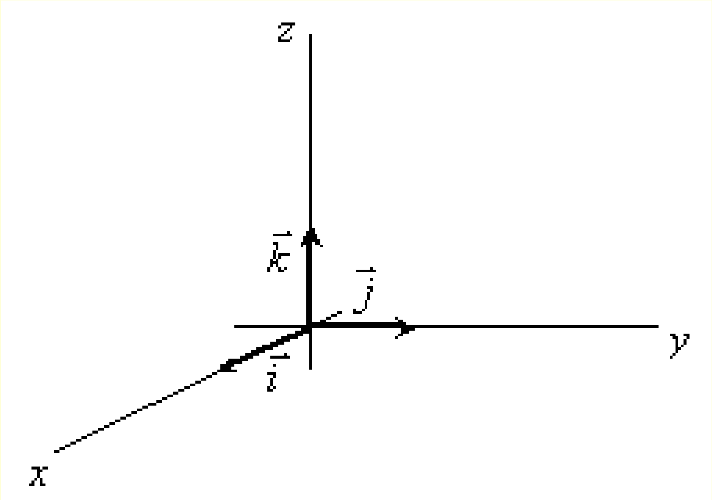
$$|\vec{\tau}| = 1$$

Jednotkové vektory v karteziánskej sústave

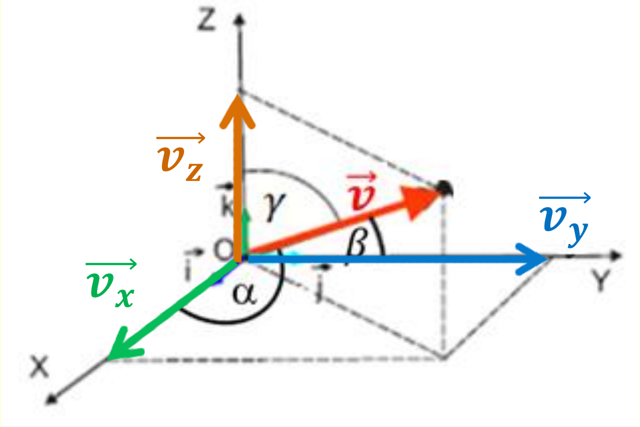
v kladnom smere osi *x* $\vec{i}$ $|\vec{i}| = 1$

v kladnom smere osi *y* $\vec{j}$ $|\vec{j}| = 1$

v kladnom smere osi *z* $\vec{k}$ $|\vec{k}| = 1$



2. Rozklad vektora na zložky



zložky vektora (pozdĺž súradnicových osí) - sú jeho pravouhlé priemety do týchto osí

$\overrightarrow{v_x}$ .... x **– ová zložka vektora**

$\overrightarrow{v_y}$ .... y **– ová zložka vektora**

$\overrightarrow{v_z}$ .... z **– ová zložka vektora**

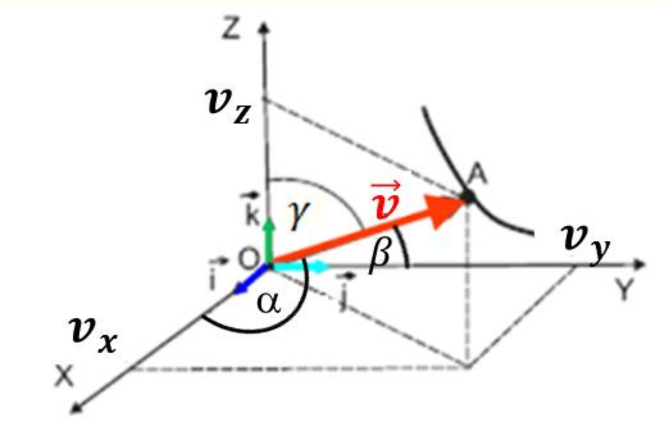
$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z}$$

$$\overrightarrow{v_x} = v_x\vec{i} \qquad \overrightarrow{v_y} = v_y\vec{j} \qquad \overrightarrow{v_z} = v_z\vec{k}$$

***súradnice vektora* –** ich veľkosti a znamienka jednoznačne určujú veľkosť, smer a orientáciu vektora; v_x , v_y, v_z

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{v_z} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j} \qquad \vec{a} = (-3{,}4)\text{cm}$$



Veľkosť vektora – druhá odmocnina súčtu druhých mocnín súradníc vektora

$$\boxed{\boldsymbol{v} = |\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{\boldsymbol{v_x}^2 + \boldsymbol{v_y}^2 + \boldsymbol{v_z}^2}}$$

Odklon vektora od jednotlivých osí = smerové kosínusy – podiel príslušnej súradnice vektora a jeho veľkosti

od osi *x:* $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v_x}}{\boldsymbol{v}}$

od osi y: $\cos\beta = \frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v}}$

od osi z: $\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{v_z}}{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{a} = (-3{,}4)\mathrm{cm}$$

$$a = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5\ \mathrm{cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{5} = -0{,}6$$

KONTROLKA: Je daný vektor $\vec{r} = (5, 0, -1)\ \mathrm{cm}$. Vyberte správnu odpoveď:

a) veľkosť vektora je 3 cm,

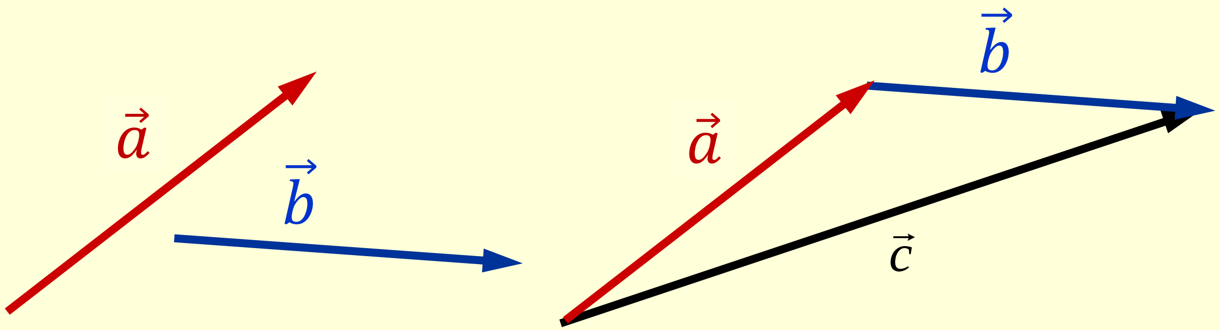
b) *z* – ová zložka vektora je -1 cm,

c) *x* – ová zložka vektora je $5\vec{\imath}$.

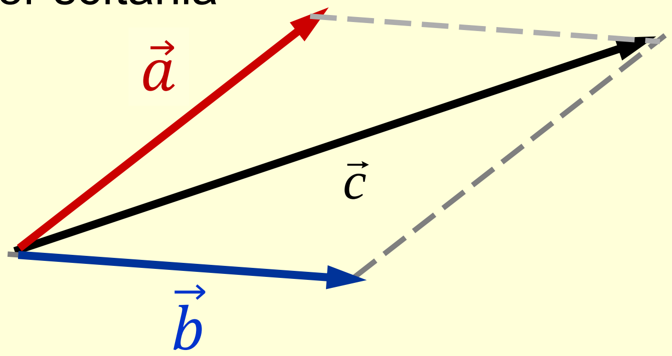
3. Operácie s vektormi

Sčítanie vektorov (skladanie) – výsledkom je vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Graficky: <u>1. spôsob:</u> do koncového bodu prvého vektora umiestnime počiatok druhého, spojíme počiatok prvého a koniec druhého vektora

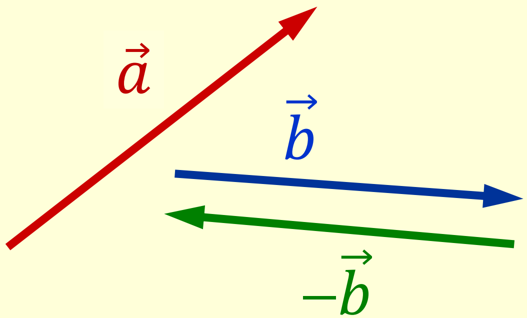


<u>2. spôsob:</u> doplnenie na rovnobežník – vektory dáme do spoločného počiatku a doplníme na rovnobežník, uhlopriečka idúca zo spoločného počiatku spájajúca protiľahlý vrchol rovnobežníka je výsledný vektor sčítania

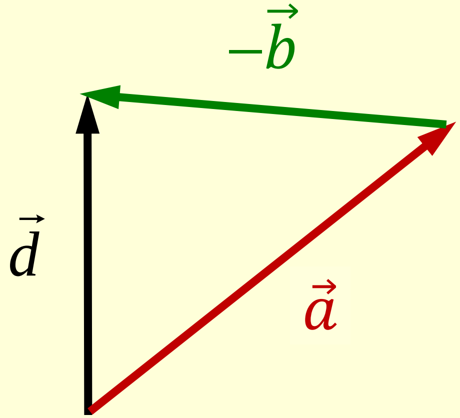


Odčítanie vektorov – výsledkom je vektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

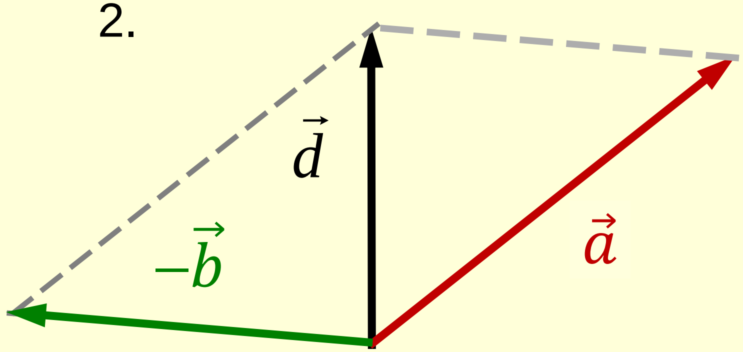
Graficky: vytvoríme opačný vektor $-\overrightarrow{b}$ k $\overrightarrow{b}$, sčítame vektory $\vec{a}$ a $-\overrightarrow{b}$, $\vec{d} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

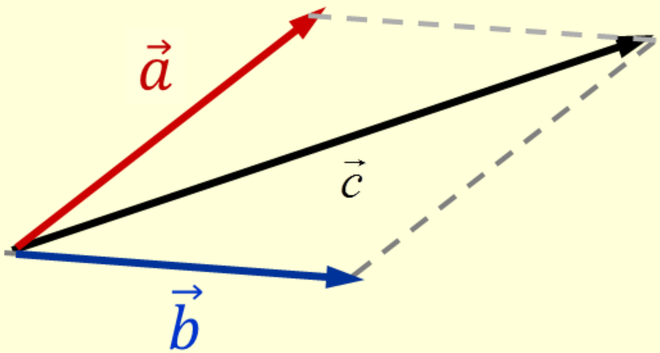


1.

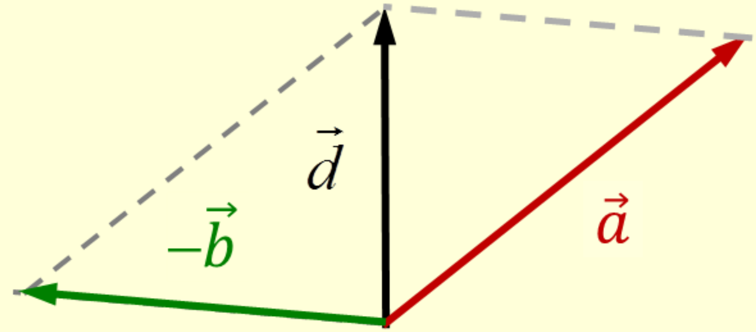


2.

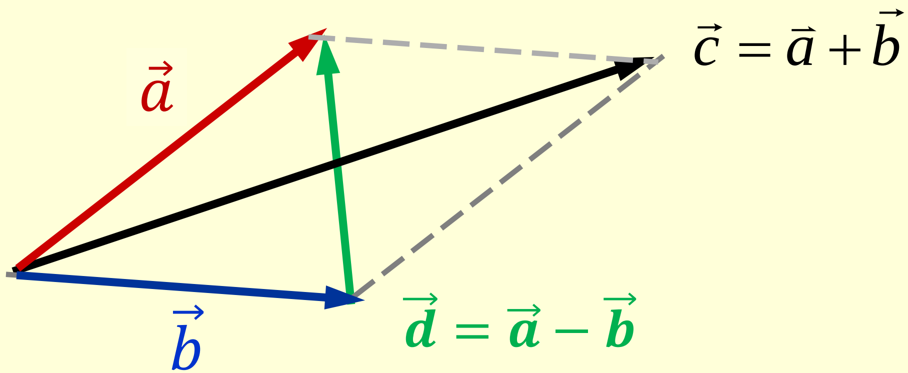




súčet vektorov



rozdiel vektorov



Matematicky:

Sčítanie vektorov

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

$$\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\boxed{c_x = a_x + b_x}$$

$$\boxed{c_y = a_y + b_y}$$

$$\boxed{c_z = a_z + b_z}$$

Odčítanie vektorov

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$-\vec{b} = -b_x \vec{i} - b_y \vec{j} - b_z \vec{k}$$

$$\vec{d} = (a_x - b_x)\vec{i} + \left(a_y - b_y\right)\vec{j} + (a_z - b_z)\,\vec{k}$$

$$\vec{d} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

$$\boxed{d_x = a_x - b_x}$$

$$\boxed{d_y = a_y - b_y}$$

$$\boxed{d_z = a_z - b_z}$$

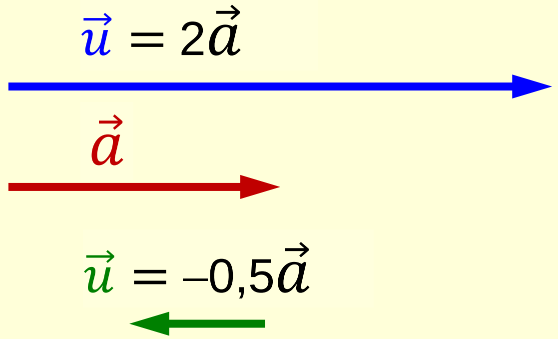
Násobenie vektorov

1. Násobenie skalárom (číslom) – výsledkom je vektor $\vec{u} = s\vec{a}$

ak $s > 0$, výsledný vektor má rovnaký smer ako pôvodný vektor

ak $s < 0$, výsledný vektor má opačný smer ako pôvodný vektor

Graficky:



Matematicky:

$$\boxed{u_x = sa_x}$$

$$\boxed{u_y = sa_y}$$

$$\boxed{u_z = sa_z}$$

KONTROLKA: Je daný vektor $\vec{c} = (3, 4, -1)$. Vyberte správnu odpoveď:

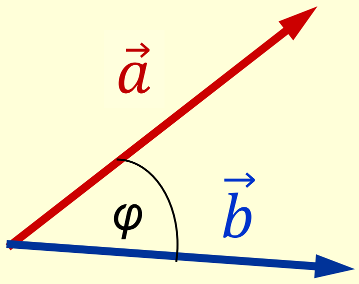
Súradnice vektora $3\vec{c}$ sú

a) $(6, 3, 2)$,

b) $(9, 12, -3)$,

c) $(0, 3, 0)$.

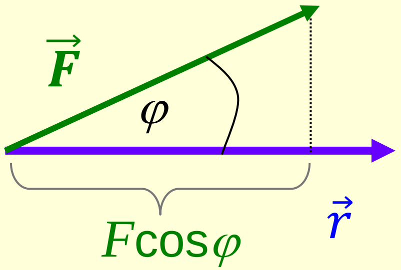
2.Skalárne násobenie dvoch vektorov (skalárny súčin) – výsledkom je <u>skalár</u> $c = \vec{a}\,.\,\vec{b}$

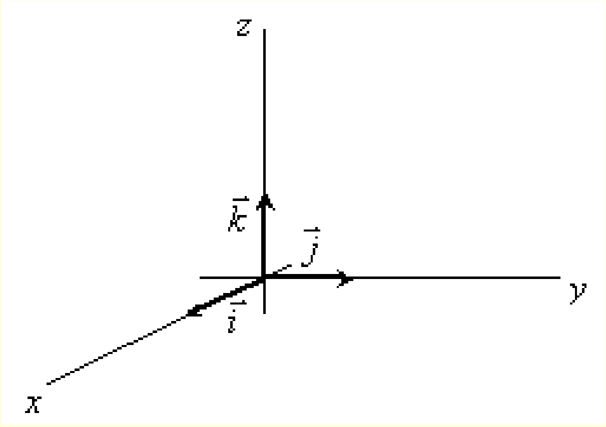


Vyjadrený pomocou uhla: $\boxed{c = \vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi}$

PR: Práca konštantnej sily

$$W = \vec{F}.\vec{r} = |\vec{F}||\vec{r}|\cos\varphi$$





$$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0° = 1$$

$$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90° = 0$$

Vyjadrený pomocou súradníc:

$$\boxed{\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right).\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$a_x\vec{i}\,.\,b_x\vec{i} + \cancel{a_x\vec{i}\,.\,b_y\vec{j}} + \cancel{a_x\vec{i}\,.\,b_z\vec{k}}$$

$$+\cancel{a_y\vec{j}\,.\,b_x\vec{i}} + a_y\vec{j}\,.\,b_y\vec{j} + \cancel{a_y\vec{j}\,.\,b_z\vec{k}} +$$

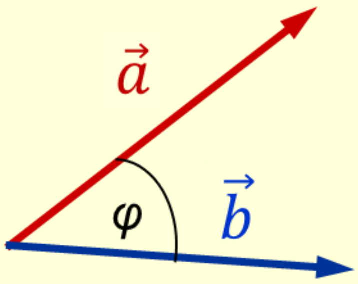
$$\cancel{a_z\vec{k}\,.\,b_x\vec{i}} + \cancel{a_z\vec{k}\,.\,b_y\vec{j}} + a_z\vec{k}\,.\,b_z\vec{k}$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boxed{\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0}$$

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$

určenie uhla medzi vektormi pomocou skalárneho súčinu

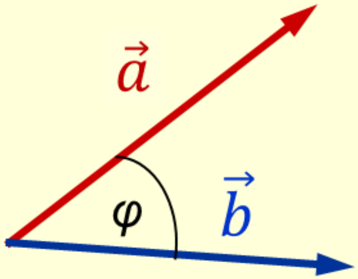


$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

$$\vec{a}\,.\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

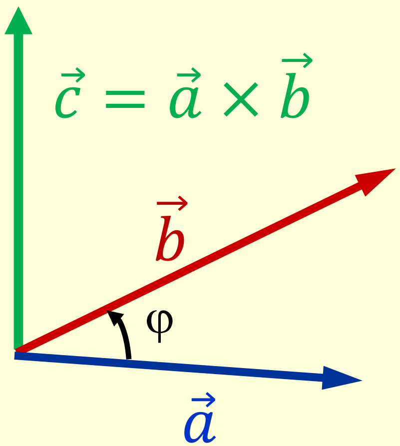
3.Vektorové násobenie dvoch vektorov (vektorový súčin) – výsledkom je vektor

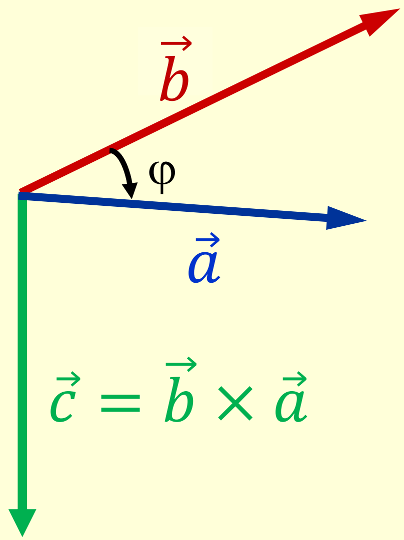


$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Smer vektora – vektor $\vec{c}$ je kolmý na rovinu vektorov $\vec{a}, \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

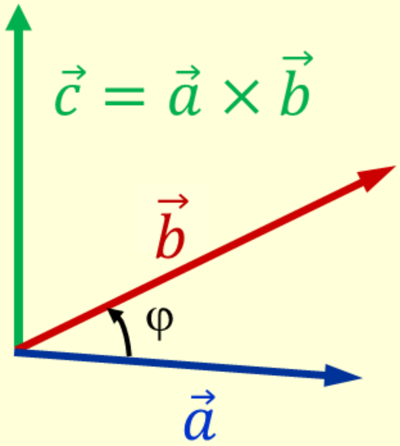




Pravidlo pravej ruky – prsty PR otáčam z polohy prvého vektora $\overrightarrow{a}$ do polohy druhého vektora $\overrightarrow{b}$, vztýčený palec ukazuje smer vektora $\overrightarrow{c}$

Veľkosť vektora

$$\boxed{c = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin \varphi}$$



PR: otáčavý účinok sily – moment sily $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

KONTROLKA: Opravte nasledujúce zápisy operácii s vektormi na správne

a) $\vec{c} = \overrightarrow{a}.\vec{b}$

b) $c = \vec{a} + \vec{b}$

c) $c = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos \varphi$

Čo sme sa naučili

Skalárne veličiny sú úplne určené svojou veľkosťou a jednotkou.

Vektorové veličiny sú úplne určené svojou veľkosťou, smerom a jednotkou.

Vektor sa dá vyjadriť pomocou zložiek vo vybraných smeroch,

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_y}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_z}}$$

alebo pomocou súradníc

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v_x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{v_y}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{v_z}\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v_x}, \boldsymbol{v_y}, \boldsymbol{v_z})$$

Vektory možno

sčítať a odčítať (výsledkom je vektor), $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

násobiť skalárnou veličinou (výsledkom je vektor), $\vec{u} = s\vec{a}$

násobiť skalárne (výsledkom je skalár), $c = \vec{a} \,.\, \vec{b}$

násobiť vektorovo (výsledkom je vektor). $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$